12-1-2005

Some New Orthogonal Arrays OA (4r;r (1) 2(p);2)

Warren F. Kuhfeld
SAS Institute

Chung Yi Suen
Cleveland State University, C.SUEN@csuohio.edu

Some new orthogonal arrays OA($4r$, $r^1 2^p$, 2)

Warren F. Kuhfeld, Chung-yi Suen

1. Introduction

Let OA($n, a^p b^q, \ldots, 2$) denote a strength 2 orthogonal array with n runs or rows and $p + q + \cdots$ columns or factors, p with a levels, q with b levels, and so on. It is well known that strength 2 orthogonal arrays are useful plans for main-effects experimental designs (Rao, 1947; Hedayat et al., 1999; and many others).

We developed an algorithm to search for the maximum number of two-level factors, p, in orthogonal arrays of the form OA($4r$, $r^1 2^p$, 2). Small examples from this family include OA(12, $3^1 2^4$, 2), OA(20, $5^1 2^8$, 2), and OA(28, $7^1 2^{12}$, 2). If the r-level column of the

OA($4r$, $r^1 2^p$, 2) is deleted, then it becomes a resolvable OA($4r$, 2^p, 2) which can be partitioned into r strength 1 orthogonal arrays. Suen (1989) considered the construction of OA($4r$, $r^1 2^p$, 2) (or resolvable OA($4r$, 2^p, 2)). It is known that if $r = 1, 2$ or a multiple of 4 (i.e. r is a Hadamard number), then p can reach its upper bound $3r$. If r is even but not a multiple of 4, then an OA($4r$, $r^1 2^{2r+2}$, 2) (i.e. $p = 2r + 2$) can be constructed. When $r > 1$ is an odd number, a theoretical construction is not known. We can only find this type of orthogonal array with computerized searches.

Our search algorithm is based on the work of Suen (1989). Suen showed that OA($4r$, $r^1 2^p$, 2) can be constructed from an $r \times p$ matrix with entries: $x, y, z, -x, -y, -z$ where $x' = (1\,1 - 1 - 1)$, $y' = (1 - 1\,1 - 1)$, and $z' = (1 - 1 - 1\,1)$. In the first two examples with 12 and 20 runs, Suen showed the maximum number of two-level factors is 4 and 8, respectively. For all larger cases, the maximum p is unknown. With our algorithm and modern computers, we were able to search longer and faster and hence find designs that he could not find. Our results show the maximum p that we found empirically for each case, not a combinatorially proven maximum.

2. Search algorithm

Our algorithm is straightforward, and it is shown in its entirety in the appendix. The implementation is in SAS/IML® (SAS, 2003). Other approaches, such as compiled C, would run faster, but an IML implementation is both convenient and compact. Furthermore, what we lose in efficiency we can gain by running on multiple computers. The algorithm starts by initializing column 1 with r copies of x. Then the algorithm seeks a second orthogonal column given the first, then a third orthogonal column given the first two, and so on. The algorithm is entirely sequential; no attempts are made to go back and change a previously found column. When the algorithm gives up without finding the next column, it goes back and starts over again beginning with column two. This outer loop is similar to the approach Xu (2002) used to find new orthogonal arrays and Kuhfeld (2005b) used to find new difference schemes.

Each search for a new column consists of repeatedly running several steps, each time based on a different random start. First, a $4r \times 1$ vector consisting of r subvectors chosen randomly from $(x, y, z, -x, -y, -z)$ is generated, then the scalar products are evaluated with the previous columns. Care is taken to minimize the size of the scalar products computed at each step and update rather than recalculate results. The algorithm tries replacing each of the r entries in turn with each element of $(x, y, z, -x, -y, -z)$. Replacements that move the scalar products closer to zero are performed until either an orthogonal column is found or the algorithm gives up and tries a new random start. For large problems and higher-order columns, it may take many random starts to find the next orthogonal column, so it is important to not give up too early. For example, the last three columns of $\text{OA}(116, 29^1 2^{23}, 2)$ were found after (21, 26, 90)-million tries.

The maximum number of random starts for each column varies by column number. Throughout the course of our searches, we made many changes to these numbers. This implementation generates maxima of 2.3^j, where j is the index of the column being sought. For example, the maximum number of random starts for columns 5, 10, 15, and 20 are 65, 4143, 266,636, and 17,161,559, respectively. The maximum number of searches is set to 100 million for column 23 and beyond. The algorithm will start over at column two very quickly if it has trouble finding any of the first few columns. However, the farther it gets, the longer it works on each new column before giving up and starting over at column two. At first, we used much smaller numbers, which worked fine for small n and p, but as we found increasingly larger arrays, we could not improve them without increasing the number of searches for new columns. For smaller arrays, using a smaller c such as 1.8 and starting over at column two very often was the best strategy. For larger arrays, c as large as 2.3 or 2.5 worked much better.

3. Main results

Our main results are shown in Table 1. We were unable to improve on the known arrays with 28 or fewer runs. From 36 runs on, we were able to find larger values of p than those previously known. Our searches found 12 new orthogonal arrays in 36 through 124 runs, resulting in 11 new arrays with 100 runs or fewer and 20 new arrays in 144 runs or fewer compared to the previous

Table 1
Orthogonal array results

New array	Runs	Replaces	Gain	Notes
Small arrays with no improvement				
	12	$3^1 2^4$		
	20	$5^1 2^8$		
	28	$7^1 2^{12}$		
New arrays through computerized search				
$9^1 2^{16}$	36	$9^1 2^{13}$	3	Adds a new child array to the catalog: $9^1 \rightarrow 3^4$
$11^1 2^{15}$	44	$11^1 2^{12}$	3	
$13^1 2^{16}$	52	$13^1 2^{12}$	4	
$15^1 2^{17}$	60	$15^1 2^{13}$	4	Also replaces OA(60, $5^1 3^1 2^{15}$, 2)
$17^1 2^{18}$	68	$17^1 2^{13}$	5	
$19^1 2^{19}$	76	$19^1 2^{13}$	6	
$21^1 2^{20}$	84	$21^1 2^{13}$	7	Also replaces OA(84, $7^1 3^1 2^{20}$, 2)
$23^1 2^{21}$	92	$23^1 2^{13}$	8	
$25^1 2^{22}$	100	$25^1 2^{13}$	9	Adds a new child array to the catalog:$25^1 \rightarrow 5^6$
$27^1 2^{22}$	108	$27^1 2^{13}$	9	
$29^1 2^{23}$	116	$29^1 2^{13}$	10	
$31^1 2^{22}$	124	$31^1 2^{13}$	9	
New arrays through juxtaposition				
$33^1 2^{22}$	132	$33^1 2^{13}$	9	From OA(32, $8^1 2^{24}$, 2) and OA(100, $25^1 2^{22}$, 2)
$35^1 2^{22}$	140	$35^1 2^{13}$	9	From OA(32, $8^1 2^{24}$, 2) and OA(108, $27^1 2^{22}$, 2)
New arrays through Wang and Wu's method				
$9^1 4^1 2^{49}$	72	$9^1 4^1 2^{46}$	3	From OA(36, $9^1 2^{16}$, 2) and OA(36, 2^{35}, 2)
$11^1 4^1 2^{56}$	88	$11^1 4^1 2^{53}$	3	From OA(44, $11^1 2^{15}$, 2) and OA(44, 2^{43}, 2)
$13^1 4^1 2^{65}$	104	$13^1 4^1 2^{61}$	4	From OA(52, $13^1 2^{16}$, 2) and OA(52, 2^{51}, 2)
$15^1 4^1 2^{74}$	120	$15^1 4^1 2^{70}$	4	From OA(60, $15^1 2^{17}$, 2) and OA(60, 2^{59}, 2)
$17^1 4^1 2^{83}$	136	$17^1 4^1 2^{78}$	5	From OA(68, $17^1 2^{18}$, 2) and OA(68, 2^{67}, 2)
$9^1 8^1 2^{117}$	144	$9^1 8^1 2^{114}$	3	From OA(72, $9^1 4^1 2^{49}$, 2) and OA(72, 2^{71}, 2)

orthogonal array catalog (Kuhfeld and Tobias, 2005). In each of 60 and 84 runs, these new results allow a single new parent to replace two parents in the old catalog. The updated catalog can be found in Kuhfeld (2005a, c). Here are the two-level factors for each of the 12 new orthogonal arrays. Our methods and new designs could be used to construct other larger arrays as well.

OA(36, $9^1 2^{16}$, 2)

x	y	$-x$	$-y$	$-y$	$-y$	$-x$	$-x$	x	y	y	$-z$	$-z$	$-x$	$-x$	y
x	y	$-y$	z	$-z$	y	$-z$	y	$-z$	y	$-x$	y	z	$-z$	z	$-y$
x	y	$-z$	x	$-x$	$-z$	x	z	$-y$	$-z$	$-z$	x	z	x	$-x$	z
x	x	x	y	x	$-y$	x	y	y	z	y	$-y$	x	$-x$	z	$-y$
x	x	x	y	y	z	$-x$	x	y	$-x$	y	y	$-x$	$-z$	y	y
x	x	$-x$	y	y	$-y$	$-z$	$-x$	$-y$	y	$-y$	$-x$	$-y$	x	x	$-z$
x	$-x$	x	y	$-z$	y	$-x$	z	$-y$	x	y	$-y$	x	x	$-y$	y
x	$-x$	y	$-y$	$-x$	z	x	z	z	z	$-z$	$-z$	$-x$	$-x$	x	z
x	$-x$	$-x$	$-x$	x	y	z	x	$-x$	$-y$	x	$-z$	z	y	y	$-z$

OA(44, $11^1 2^{15}$, 2)

x	y	x	y	$-x$	$-x$	y	z	$-z$	z	$-y$	x	$-z$	$-x$	y
x	y	y	y	x	$-x$	$-z$	$-x$	$-y$	z	$-x$	z	$-x$	x	z
x	y	y	z	y	z	y	$-z$	x	z	y	y	y	$-x$	$-z$
x	y	y	$-y$	$-z$	z	$-y$	$-z$	x	z	z	$-x$	x	$-x$	z
x	y	z	$-y$	$-z$	$-y$	z	$-y$	z	y	x	$-z$	$-x$	z	$-y$
x	y	$-x$	$-y$	$-x$	y	$-y$	y	y	$-z$	z	x	$-z$	y	$-x$
x	y	$-x$	$-z$	$-y$	z	z	$-z$	$-y$	$-y$	$-z$	$-y$	x	x	$-y$
x	y	$-y$	x	$-z$	$-y$	$-z$	x	$-z$	y	$-z$	$-y$	z	x	y
x	y	$-y$	z	x	x	$-z$	$-z$	$-x$	$-y$	z	$-z$	x	$-y$	y
x	x	z	z	y	x	$-z$	y	z	y	$-z$	$-y$	$-x$	$-y$	$-y$
x	$-x$	x	$-x$	$-z$	$-y$	z	z	$-x$	z	y	$-x$	y	y	x

OA(52, $13^1 2^{16}$, 2)

x	y	x	$-x$	z	$-y$	y	z	x	$-z$	$-x$	$-x$	z	z	z	x
x	y	y	y	x	$-x$	$-x$	$-x$	z	x	x	$-y$	z	$-y$	x	$-y$
x	y	y	$-x$	$-x$	x	$-z$	$-x$	x	$-y$	y	z	$-y$	y	z	z
x	y	y	$-x$	$-y$	y	$-y$	$-z$	$-x$	$-y$	$-z$	y	z	$-z$	z	$-z$
x	y	$-x$	x	y	x	$-z$	z	y	y	$-z$	y	z	x	x	$-z$
x	y	$-x$	x	$-x$	z	z	y	$-y$	y	$-y$	$-y$	$-z$	y	z	y
x	y	$-y$	y	x	z	x	x	y	$-x$	z	x	z	$-x$	$-z$	z
x	y	$-y$	$-z$	$-y$	z	$-z$	z	$-x$	z	y	$-y$	y	$-x$	$-x$	$-z$
x	y	$-z$	$-y$	$-x$	$-x$	$-z$	z	$-y$	$-z$	y	x	$-z$	$-z$	y	$-y$
x	x	x	x	$-z$	y	y	z	$-y$	z	$-x$	z	y	$-y$	y	y
x	x	$-x$	$-x$	x	y	y	z	z	y	z	$-z$	$-y$	$-z$	$-x$	$-y$
x	$-x$	x	x	y	y	z	x	y	x	x	z	z	z	$-z$	$-z$
x	$-x$	y	z	z	z	$-z$	$-z$	$-z$	$-x$	y	$-x$	y	x	$-z$	$-x$

OA(60, $15^1 2^{17}$, 2)

x	y	x	y	y	x	z	$-x$	$-x$	x	y	z	x	$-y$	y	$-x$	$-z$
x	y	x	$-x$	$-z$	$-z$	$-y$	z	y	z	$-x$	$-x$	$-x$	y	$-x$	x	$-z$
x	y	x	$-z$	$-y$	$-x$	z	$-z$	x	$-x$	y	x	$-z$	$-y$	$-y$	x	$-y$
x	y	y	y	$-x$	$-y$	$-x$	$-x$	x	z	$-z$	x	$-z$	y	z	$-y$	$-x$
x	y	$-x$	$-x$	$-y$	$-x$	z	$-z$	$-y$	$-z$	$-x$	$-y$	x	y	x	y	$-x$
x	y	$-x$	$-z$	y	x	$-z$	y	$-x$	$-y$	$-y$	x	z	$-z$	$-z$	x	z
x	y	$-z$	$-z$	$-y$	x	z	x	z	$-x$	$-y$	$-x$	$-x$	$-x$	$-z$	$-z$	y
x	x	y	y	x	z	y	z	z	z	$-y$	z	y	$-y$	$-y$	$-x$	z
x	x	$-x$	y	z	$-z$	x	x	$-z$	x	z	z	$-z$	$-y$	$-z$	z	$-y$
x	x	$-y$	y	x	$-z$	$-x$	$-x$	z	$-y$	$-y$	$-z$	y	$-z$	z	y	z
x	x	$-y$	y	$-x$	y	x	z	y	$-z$	x	z	$-z$	y	$-y$	$-z$	x
x	$-x$	x	x	$-x$	z	y	x	z	$-y$	z	$-z$	y	y	z	z	$-z$
x	$-x$	y	$-y$	y	y	z	y	$-z$	$-x$	x	$-x$	y	x	z	$-x$	$-y$
x	$-x$	z	$-y$	z	$-y$	z	y	z	z	y	x	y	z	x	z	x
x	$-x$	$-x$	x	x	$-x$	z	$-z$	z	x	y	$-x$	y	$-z$	$-x$	y	y

OA(68, $17^{1}2^{18}$, 2)

x	y	x	y	−y	x	y	x	y	−x	x	−x	x	x	−y	−x	x	z
x	y	y	x	x	z	−z	−z	−y	−y	y	x	−z	−z	−z	−y	−y	y
x	y	y	−y	−z	−z	−x	z	y	z	−z	−z	−z	−x	y	−z	x	−x
x	y	z	−x	−z	y	x	−z	x	y	−z	x	y	−x	−z	z	−y	−y
x	y	z	−z	x	−x	x	−x	x	y	y	−x	−z	−y	−y	x	y	y
x	y	−x	y	−x	x	x	z	−x	−y	−x	z	x	−y	y	y	−x	z
x	y	−x	−y	y	−x	−x	−z	z	−x	−z	−z	y	−y	z	−z	−x	−y
x	y	−x	−z	z	z	y	−y	−y	x	−z	y	−y	y	−z	−x	x	−y
x	y	−y	y	−x	y	−y	−x	y	−z	−z	x	x	x	−z	−z	y	z
x	y	−y	−y	−x	−y	y	z	−x	z	z	−y	−x	−x	x	z	−z	y
x	y	−z	z	x	y	y	z	−x	x	−z	−x	−y	y	y	x	y	x
x	x	x	x	x	−x	−x	y	−y	z	−x	z	z	x	z	y	y	z
x	x	z	−x	−x	z	−x	x	x	z	−z	y	−y	−y	y	−y	−x	z
x	x	z	−y	−y	−y	−y	z	−x	z	−z	y	−x	y	−x	y	y	−z
x	−x	x	y	z	−z	z	z	y	y	y	z	−y	y	−z	−z	−y	−z
x	−x	−y	−y	y	y	−y	−x	z	x	x	z	−y	y	−z	−x	−y	z
x	−x	−y	−y	−z	x	x	x	x	−x	z	−z	−x	y	−z	x	y	−z

OA(76, $19^{1}2^{19}$, 2)

x	y	x	x	−y	z	−x	−z	−x	z	−y	z	−x	z	−y	−x	y	y	−z
x	y	x	x	−y	−z	y	y	x	−y	x	−x	−y	z	z	−z	−y	x	−x
x	y	x	y	y	−y	x	−y	−z	y	z	y	x	−x	y	y	−z	−x	y
x	y	y	x	z	−y	−z	−z	x	−z	−z	−z	−x	−y	x	z	−y	−y	−y
x	y	y	−y	x	x	−y	z	x	−z	−z	y	z	y	z	−x	z	−x	x
x	y	y	−z	−z	x	z	−x	y	z	−x	−y	−x	x	−x	−z	−x	−z	z
x	y	z	y	−z	−z	−z	y	z	−x	−z	y	y	−x	−z	−x	z	x	−y
x	y	z	−z	x	z	−y	x	−x	−x	−z	−z	y	x	z	z	−z	−y	−x
x	y	z	−z	−x	−x	−y	z	−y	z	z	−z	−z	x	−y	x	−x	−x	y
x	y	z	−z	−x	−z	y	−y	−z	−y	−x	z	x	y	y	−y	−x	z	x
x	y	−x	−x	−x	−y	−x	−z	−x	x	z	−y	z	−x	x	−z	−z	z	−x
x	y	−x	−y	x	−x	y	x	y	x	−x	y	z	x	−z	−x	−z	y	−z
x	y	−y	y	−y	z	−z	z	z	z	x	x	−y	−y	−x	x	x	z	y
x	y	−y	−x	z	−z	x	−y	z	y	z	−y	y	x	−z	x	x	−z	−y
x	y	−y	−y	y	−y	x	−x	z	z	−x	−y	−y	−x	z	z	x	y	−x
x	y	−y	−z	z	y	−z	x	z	x	−z	z	−y	−z	−y	−z	−z	−y	−y
x	y	−z	−y	x	y	−y	z	−x	−y	y	−z	z	−x	y	x	y	−y	x
x	x	z	−y	y	x	y	−z	−z	z	x	−z	x	−y	−y	−z	z	x	x
x	−x	−x	−x	−x	−x	−x	−x	x	−x	x	y	−y	−y	y	z	−z	z	−y

OA(84, $21^{1}2^{20}$, 2)

x	y	x	z	y	−y	−y	−y	−x	z	z	−x	z	−z	−y	−y	z	z	y	z
x	y	x	z	−x	−z	x	y	−x	−z	y	x	z	y	−x	y	−z	x	−z	−x
x	y	x	−y	y	−z	z	−x	y	z	x	z	−y	x	−z	y	−z	−x	−z	x
x	y	x	−y	−y	−y	z	x	x	−y	−y	x	z	−y	−x	x	z	−x	x	y
x	y	y	y	x	−x	−y	−y	x	y	−x	−x	−x	−z	y	x	y	x	−y	−z
x	y	y	−x	y	x	−y	−x	−y	−y	y	x	−x	−y	−z	−x	−y	−z	z	−y
x	y	z	−z	x	y	x	x	−y	x	−y	−x	−y	z	x	−x	z	−x	−y	y
x	y	−y	−x	−z	x	−y	y	−y	y	−z	−x	x	x	−y	y	−x	x	z	z
x	y	−y	−y	y	z	y	−y	−z	x	−x	−x	x	−x	−z	z	y	z	x	−y
x	y	−z	y	−x	y	y	x	−y	y	−y	−x	−x	−x	−y	−x	−x	−y	−z	−x
x	y	−z	−x	z	z	z	z	y	−z	z	x	x	−z	x	−x	−y	x	x	z
x	y	−z	−z	y	−x	y	x	x	z	−y	y	y	−x	y	x	x	−y	−x	−y
x	y	−z	−z	−z	−z	−x	x	−x	−x	y	y	x	z	y	y	x	y	y	z
x	x	z	−z	−x	z	x	−x	z	−x	x	−x	z	−z	−z	x	y	−x	−z	z
x	x	−x	x	−x	−x	y	−x	−y	−y	−y	z	−z	−z	y	y	−z	y	z	z
x	x	−x	x	−z	x	−x	z	x	z	z	z	−z	y	z	−x	−y	x	−y	−z
x	x	−z	−y	y	−y	z	x	−y	y	z	x	z	x	−y	−x	−z	y	−x	x
x	−x	y	z	y	−y	z	−x	−y	x	x	−z	−z	z	y	x	−y	z	z	y
x	−x	−x	x	x	−z	z	−x	−z	−x	z	x	−z	−z	−x	−z	z	y	−y	z
x	−x	−x	y	y	−z	−x	y	−x	z	−x	x	z	y	x	x	−z	−x	y	y
x	−x	−y	−y	x	−z	−y	z	−y	−z	y	−y	−x	z	−z	−z	z	−y	−x	−z

OA(92, $23^1 2^{21}$, 2)

x	y	x	y	$-y$	y	$-y$	$-y$	z	z	$-z$	$-z$	x	$-z$	$-z$	$-x$	x	x	$-x$	$-y$	z
x	y	x	z	$-x$	$-x$	z	y	y	z	x	y	z	x	z	y	$-x$	$-x$	$-x$	x	y
x	y	x	$-x$	y	$-z$	$-y$	$-z$	z	$-z$	$-y$	$-z$	$-x$	$-z$	x	$-y$	y	$-y$	x	$-z$	y
x	y	x	$-z$	x	z	z	$-z$	z	y	$-x$	$-z$	y	$-y$	$-x$	$-x$	$-y$	y	$-z$	y	y
x	y	y	z	$-x$	x	y	z	$-z$	$-x$	y	$-z$	$-x$	y	$-x$	$-y$	$-x$	x	$-x$	z	$-z$
x	y	y	z	$-z$	$-x$	y	y	$-y$	z	$-y$	$-x$	$-y$	$-z$	z	$-y$	x	$-x$	x	$-y$	$-y$
x	y	z	$-x$	y	z	$-z$	z	x	x	z	$-y$	z	x	$-z$	y	$-y$	$-z$	$-y$	$-y$	$-y$
x	y	$-x$	z	x	$-y$	$-x$	$-y$	$-y$	z	x	y	$-x$	y	$-y$	y	z	x	$-x$	$-x$	$-z$
x	y	$-x$	z	y	$-x$	z	x	z	y	$-z$	z	$-y$	z	$-z$	y	y	$-x$	x	$-x$	x
x	y	$-x$	$-x$	$-y$	x	y	x	$-x$	z	$-x$	$-z$	x	$-y$	$-y$	x	$-x$	y	y	z	y
x	y	$-x$	$-y$	$-x$	$-z$	$-z$	y	$-y$	$-z$	$-y$	z	z	$-z$	y	y	y	z	$-y$	x	$-x$
x	y	$-x$	$-z$	$-z$	$-x$	z	$-x$	y	x	$-x$	x	$-z$	$-y$	z	$-x$	$-x$	$-y$	$-y$	$-z$	z
x	y	$-y$	x	$-y$	z	$-y$	x	x	$-z$	$-y$	$-x$	$-y$	x	$-z$	x	z	x	x	$-x$	$-y$
x	y	$-y$	y	$-y$	$-x$	$-z$	$-y$	$-y$	$-x$	y	$-y$	z	y	x	x	y	$-z$	$-z$	x	y
x	y	$-y$	$-y$	$-x$	y	y	z	$-z$	z	y	$-x$	y	$-x$	$-x$	$-z$	$-z$	$-y$	$-z$	$-z$	z
x	y	$-z$	z	z	x	z	$-x$	$-z$	$-z$	y	x	y	$-x$	x	$-z$	$-z$	$-x$	y	$-y$	$-y$
x	y	$-z$	$-z$	x	x	$-z$	$-x$	y	$-z$	$-x$	y	y	x	y	$-z$	z	y	x	x	$-y$
x	x	x	$-y$	$-y$	y	z	$-z$	$-x$	$-z$	$-z$	$-z$	z	$-x$	z	$-y$	x	x	y	x	$-y$
x	x	y	x	$-y$	$-z$	$-y$	$-y$	$-y$	$-x$	$-y$	$-z$	y	y	z	$-z$	$-x$	$-x$	$-z$	$-y$	y
x	x	z	z	x	z	$-z$	$-y$	x	y	x	y	$-z$	$-z$	z	$-x$	$-z$	$-z$	z	$-y$	$-y$
x	$-x$	x	z	$-z$	$-y$	z	z	z	$-z$	$-z$	z	x	$-y$	$-y$	x	z	$-z$	$-z$	$-x$	$-y$
x	$-x$	$-x$	x	z	x	z	$-z$	$-z$	x	y	y	$-y$	$-z$	$-z$	z	x	$-z$	$-x$	y	y
x	$-x$	$-y$	z	z	z	x	y	$-x$	$-z$	x	x	y	$-x$	z	$-y$	x	z	y	$-x$	z

OA(100, $25^1 2^{22}$, 2)

x	y	x	x	z	x	z	$-y$	y	$-z$	$-z$	y	$-y$	x	$-y$	x	$-z$	z	$-z$	$-y$	x	$-x$
x	y	x	$-y$	y	$-y$	$-z$	$-y$	$-x$	z	$-x$	$-x$	x	z	y	$-z$	y	$-x$	y	$-z$	$-z$	z
x	y	x	$-y$	$-x$	x	y	z	x	$-y$	$-y$	z	z	x	z	x	$-x$	y	y	$-x$	$-z$	z
x	y	y	y	z	z	$-z$	y	$-z$	$-y$	$-x$	$-z$	$-y$	z	z	$-y$	$-x$	z	$-z$	y	$-y$	$-z$
x	y	y	$-y$	x	y	$-z$	$-y$	$-x$	x	y	$-y$	$-x$	$-x$	x	x	$-y$	$-z$	z	$-x$	$-x$	$-z$
x	y	y	$-z$	z	$-y$	$-z$	x	$-z$	$-z$	z	$-y$	$-z$	$-x$	$-z$	$-y$	$-z$	$-z$	$-y$	z	$-z$	x
x	y	z	$-y$	x	y	y	y	z	x	y	x	$-x$	x	y	$-z$	z	$-y$	y	x	x	x
x	y	z	$-y$	z	$-x$	z	$-y$	$-z$	$-x$	$-x$	z	y	$-x$	x	$-y$	z	$-y$	$-y$	$-z$	$-z$	$-x$
x	y	$-x$	x	y	$-x$	z	y	z	z	$-z$	$-x$	y	x	$-y$	$-z$	x	y	y	$-y$	$-x$	$-y$
x	y	$-x$	$-x$	x	z	z	y	x	$-z$	y	y	$-z$	y	$-x$	y	y	y	$-y$	y	$-z$	$-y$
x	y	$-x$	$-z$	$-z$	x	$-x$	$-x$	z	$-z$	$-y$	$-z$	x	$-x$	$-x$	z	z	$-y$	$-x$	z	y	z
x	y	$-y$	x	$-y$	x	z	$-x$	x	z	z	$-z$	$-y$	y	x	x	$-z$	z	$-y$	$-z$	$-x$	z
x	y	$-y$	y	$-x$	x	$-y$	$-y$	$-x$	$-y$	$-x$	x	z	$-z$	y	$-y$	x	$-x$	x	$-y$	z	y
x	y	$-y$	z	x	$-x$	$-y$	y	x	y	$-x$	$-z$	$-y$	$-y$	$-y$	$-z$	$-x$	x	y	x	$-z$	$-z$
x	y	$-z$	x	x	z	$-y$	y	z	x	$-z$	$-z$	$-z$	$-y$	y	y	z	$-x$	$-y$	x	y	y
x	x	x	x	$-y$	$-y$	$-x$	z	$-y$	y	x	$-y$	$-z$	y	$-z$	$-x$	$-z$	x	x	$-z$	x	y
x	x	y	$-x$	$-x$	x	$-y$	$-y$	y	x	z	x	x	$-z$	$-y$	$-x$	y	x	$-z$	x	$-x$	$-z$
x	x	y	$-x$	$-z$	$-y$	$-z$	x	$-z$	$-z$	$-z$	$-x$	y	y	$-y$	y	x	z	$-x$	$-x$	$-z$	y
x	x	z	z	z	$-x$	x	y	z	$-z$	z	$-x$	y	$-z$	$-x$	x	z	$-x$	$-y$	y	$-x$	z
x	x	$-x$	x	$-x$	$-x$	x	$-x$	$-x$	$-x$	x	x	y	$-y$	z	y	$-x$	z	z	$-y$	x	z
x	$-x$	y	$-x$	$-y$	$-y$	z	$-z$	$-z$	z	x	$-z$	$-z$	$-z$	x	$-x$	z	z	y	z	z	$-y$
x	$-x$	y	$-y$	$-x$	z	$-y$	x	$-y$	$-z$	$-y$	$-z$	$-y$	$-x$	$-x$	$-x$	$-z$	x	z	z	y	z
x	$-x$	z	$-x$	x	$-y$	$-y$	y	y	$-x$	$-z$	z	$-z$	x	y	$-x$	$-y$	$-y$	$-z$	$-x$	x	z
x	$-x$	z	$-x$	$-x$	$-x$	$-y$	$-z$	x	z	x	$-y$	$-x$	$-z$	x	y	$-z$	y	y	z	$-z$	$-x$
x	$-x$	$-z$	y	z	y	y	y	$-x$	$-x$	x	$-y$	z	z	$-x$	$-y$	x	$-y$	z	z	y	x

OA(108, $27^1 2^{22}$, 2)

x	y	x	x	y	−y	−y	x	−x	−x	−y	−x	z	y	z	−y	z	−y	−y	z	z	−y
x	y	x	y	−y	−x	−x	−y	x	y	y	y	−y	z	−y	−z	−x	−z	−y	z	−z	−x
x	y	x	y	−y	−x	−y	−x	x	−x	x	z	−x	−y	z	z	z	−z	y	−z	y	z
x	y	x	−x	x	x	y	−y	y	−x	x	−y	−z	y	−y	x	−y	z	z	−z	−y	−z
x	y	x	−z	z	−z	z	y	y	−z	y	x	−z	x	z	x	z	y	y	y	x	x
x	y	y	z	z	z	z	x	−z	y	−y	z	z	−y	−y	−y	y	y	x	−x	−x	x
x	y	y	−y	x	−z	−x	y	−y	y	x	−x	x	z	−y	−x	z	x	z	−x	z	x
x	y	y	−y	−y	z	−x	−y	x	y	−z	−y	y	x	y	−z	x	−y	−x	−y	z	x
x	y	y	−z	y	x	z	z	−x	z	y	−x	x	z	−y	−x	−z	−y	y	−z	z	−x
x	y	−x	z	−y	−z	−x	z	−y	z	z	x	−x	−z	z	x	x	−z	x	z	−z	−x
x	y	−x	−z	−y	y	−x	y	x	−y	z	y	x	y	y	−y	−x	−y	x	−y	−y	−x
x	y	−y	z	y	z	−z	−x	−z	x	y	−z	−z	z	−z	z	y	−z	z	z	−x	x
x	y	−y	−x	−x	x	y	−y	−z	−x	y	x	x	−x	z	x	−z	z	−x	x	z	y
x	y	−y	−z	y	−z	−z	−y	−x	−x	−y	x	−y	−z	−x	−x	−z	−y	−x	−y	y	z
x	y	−y	−z	z	−x	x	x	−y	−y	−x	−y	z	x	−z	−x	z	−z	x	x	x	x
x	y	−y	−z	−x	z	−y	−y	−y	−y	−y	y	−z	−z	z	−z	−y	y	z	x	x	y
x	y	−z	−x	x	−z	y	z	−x	x	−x	y	y	−x	z	x	−z	−x	−z	y	−y	−y
x	x	y	−z	−y	−y	−x	z	−y	x	−z	x	−z	z	x	−x	y	z	−z	−y	−z	−y
x	x	z	x	−z	y	x	x	x	y	−x	−y	−z	−x	y	x	−z	y	−x	−x	−y	z
x	x	−x	−y	y	−z	−y	−z	−z	−x	z	−x	−y	−y	z	−y	z	z	−z	y	−x	−z
x	x	−z	z	y	−z	x	z	−y	y	y	−x	−y	−z	−z	x	−y	x	−y	−z	x	y
x	x	−z	−z	−z	−z	x	y	−z	x	y	y	−x	z	x	z	−y	−y	z	x	−z	−x
x	−x	x	x	y	−x	−y	−x	−x	y	−x	y	y	y	z	y	−y	y	z	−z	−x	−y
x	−x	−x	x	x	−z	x	y	−z	x	y	y	z	−z	−y	−y	y	y	z	−y	−z	z
x	−x	−x	y	−x	y	−y	−z	z	y	x	−x	z	y	y	−x	y	−x	−x	−z	x	y
x	−x	−x	−x	−x	y	x	−x	z	x	−z	x	−y	−y	−x	−x	z	z	x	z	−z	z
x	−x	−z	−z	−z	x	−z	z	−y	z	y	−z	−x	y	−z	z	z	y	−z	−x	−x	−x

OA(116, $29^1 2^{23}$, 2)

x	y	x	−x	z	−x	−x	x	−y	−x	x	−z	−y	z	−x	z	y	−y	x	y	−y	−z	−z
x	y	y	x	−x	y	z	z	y	−y	−x	z	y	z	x	−x	−z	y	x	x	−z	−x	−x
x	y	y	y	y	x	−y	−y	−x	−z	−z	−x	−z	−z	x	x	−z	−x	−y	−x	y	−x	y
x	y	y	y	−z	−y	−x	x	−y	−y	−z	−y	z	−y	−y	y	z	z	−z	−y	−z	y	−z
x	y	y	−x	−z	−y	y	−y	−y	y	−y	−x	−x	−x	−z	−z	x	x	−x	−z	−y	y	x
x	y	y	−y	x	y	−z	−y	−x	z	z	−x	x	y	−x	−x	y	−y	−z	x	−x	−z	x
x	y	z	x	z	−y	x	y	x	−z	−y	−y	−x	y	z	y	−y	x	−x	y	x	−x	x
x	y	z	−x	z	−y	−y	−y	z	−y	−x	y	−z	−z	y	−z	−y	−x	−x	z	z	x	−z
x	y	−x	y	z	x	−z	−y	−z	y	y	−y	x	−x	z	−x	z	y	z	−z	x	x	−x
x	y	−x	y	−x	z	−z	−x	−z	y	−z	z	y	−z	−z	x	z	−x	−z	z	x	−z	−y
x	y	−x	−y	−y	−y	z	y	z	−y	−z	−z	y	z	−z	−x	x	−x	y	−x	y	−z	−z
x	y	−y	z	−x	z	x	−x	−y	x	x	z	y	−x	y	x	−x	−z	x	y	−z	z	y
x	y	−y	−x	x	z	−x	z	x	x	−x	−z	−x	−z	z	−y	−x	x	y	z	−x	z	−x
x	y	−y	−y	−z	y	−z	y	z	−x	z	x	−z	−x	y	x	−y	y	−y	x	−z	z	y
x	y	−z	x	y	x	z	−z	x	−x	−z	z	−z	x	−z	−y	−y	z	z	−y	−x	x	z
x	x	x	y	−x	y	−y	−z	−z	−z	−x	−y	−x	x	x	−z	−y	z	z	−y	−z	−z	y
x	x	y	x	−y	−z	x	x	−x	z	x	x	−y	x	−x	−z	y	−z	−x	x	z	−x	−z
x	x	y	y	−y	−z	−x	z	z	x	y	−y	z	−z	−x	−y	−y	−z	−y	−z	−z	−z	z
x	x	y	−x	−y	x	−z	−z	z	−z	−z	y	y	−y	−x	x	−z	−z	−y	−x	x	−z	−x
x	x	y	−y	−y	−z	−z	−z	x	x	z	z	y	z	−y	−x	−y	z	x	y	z	x	x
x	x	y	−z	x	y	x	−z	x	−x	x	x	z	−y	x	y	x	y	y	z	z	−y	−x
x	x	−x	y	y	−x	z	−z	z	−z	−y	y	y	−x	−z	−z	−y	−z	−z	−x	−x	−x	z
x	−x	x	y	z	y	−y	y	−x	−x	−y	y	z	x	−y	−x	z	z	y	−x	y	−x	y
x	−x	x	y	z	−y	x	−z	y	−z	−y	−z	x	−y	x	y	y	−z	x	z	−y	z	x
x	−x	x	−x	x	y	x	−y	y	x	y	z	y	z	−y	y	z	z	y	−z	−y	z	x
x	−x	y	x	−y	−x	−y	x	y	y	−y	−z	y	y	y	−z	y	z	z	z	x	x	y
x	−x	y	x	−z	y	−x	−z	−y	y	x	y	−y	−z	z	−z	−y	−y	y	x	−x	−z	−x
x	−x	y	z	y	−y	z	−x	−x	y	−x	y	x	−y	z	z	−x	x	−x	−x	z	x	−x
x	−x	−x	y	z	−x	−x	−x	z	z	−y	−y	z	x	−y	x	y	−z	y	x	y	−z	x

OA(124, $31^1 2^{22}$, 2)

x	y	x	x	x	y	x	−y	y	x	z	−x	x	−y	z	x	x	−x	−x	x	−y	y
x	y	x	x	y	−x	−x	−y	−y	−y	−x	y	−x	−x	x	y	z	−x	−y	z	−y	z
x	y	x	z	−z	z	y	x	y	−x	−z	z	−y	z	−z	−x	x	−x	y	−x	x	z
x	y	x	−x	−y	−x	−z	x	−z	x	−x	x	−x	x	y	−y	z	−y	z	y	−x	x
x	y	x	−y	−y	−z	y	−x	−y	−y	x	−z	−x	z	z	z	−x	−y	−z	−z	−y	−y
x	y	y	y	−x	y	x	−x	−y	−y	y	−x	x	x	y	y	z	−z	y	z	y	y
x	y	y	z	y	y	−z	−x	−y	y	−y	−z	z	−z	z	−x	x	x	z	−y	x	−x
x	y	y	−x	−x	−z	−x	−y	−z	−x	−y	y	−x	−x	−x	x	x	x	−y	z	z	−z
x	y	y	−y	−x	y	−y	−z	z	−y	−z	−z	x	−x	−x	−x	−x	y	z	y	−z	−z
x	y	z	−x	y	−x	z	−x	y	−z	−y	−x	y	−z	−z	y	z	x	x	x	y	−y
x	y	−x	x	y	z	−y	−z	−z	z	−y	−z	−x	x	−z	−y	y	z	y	x	x	−y
x	y	−x	x	−y	−z	−x	y	−z	z	z	z	−y	−z	y	z	−x	−z	z	y	−z	−x
x	y	−x	y	−y	−y	−x	y	y	−y	x	−y	−z	−y	−z	−y	x	−z	−y	−z	z	x
x	y	−y	y	y	x	z	−y	y	−z	x	y	z	z	−z	−x	z	−x	z	−z	−x	−y
x	y	−y	y	−z	−y	−z	−z	x	x	y	y	z	−y	−z	z	y	−z	x	−x	z	z
x	y	−z	−x	y	−y	−y	−z	−z	−y	−y	x	x	y	−y	x	−y	−z	−z	x	x	−x
x	y	−z	−y	−x	z	x	y	y	−z	y	x	−z	y	z	y	y	−y	−z	−z	x	−y
x	y	−z	−y	−z	x	−x	y	−z	z	−z	−z	y	−z	y	z	−y	−z	−x	−z	−y	y
x	y	−z	−z	−x	−z	−x	−z	x	−z	−y	x	x	x	z	−z	−x	y	−z	−z	y	y
x	x	x	−z	−x	z	y	−z	−y	−y	x	−x	−z	−z	z	x	−x	x	y	−x	z	−y
x	x	z	y	−y	−x	y	−x	z	z	−y	y	x	−z	y	y	y	y	−z	−y	−x	−z
x	x	−x	y	x	z	x	z	z	−y	−y	−y	−y	−x	−x	y	−z	y	z	−x	−y	x
x	x	−x	z	−z	z	z	x	−x	x	−z	−x	−x	x	−x	−x	−z	−z	y	y	−y	−z
x	x	−x	−y	z	y	x	x	y	−z	y	−z	z	z	z	x	y	−z	z	−y	z	z
x	x	−z	−z	x	x	z	−y	−x	x	−z	−z	−y	−z	x	−x	−y	−y	y	z	y	z
x	−x	x	x	x	−x	x	y	−y	−y	x	y	−x	−y	−y	z	−y	x	y	z	−z	−y
x	−x	z	−x	y	−y	y	−z	−x	−y	−x	x	−z	z	x	−y	−y	−z	z	−z	−z	y
x	−x	−x	x	x	x	−x	x	−z	−x	z	y	z	y	z	x	−z	z	−y	−z	−x	−z
x	−x	−y	−x	x	−z	y	x	y	y	−x	y	x	−x	y	z	−z	y	y	−x	z	z
x	−x	−y	−y	−z	−z	−z	−x	x	−x	−z	−y	−y	y	z	y	z	−x	z	−z	−x	−y
x	−x	−y	−z	z	x	x	−y	z	−x	−x	y	−z	−z	x	z	−z	−z	y	x	z	y

In all cases, the results are permuted based on the second column. Exchanging in x lines 3 and 4 transforms z to y and $-z$ to $-y$. Exchanging in x lines 1 and 2 and lines 3 and 4 transforms $-y$ to y. Hence, the second column consists of y ($i = 1, 3, \ldots, r$ times), and x and $-x$ ($(r-i)/2$) times each). Our algorithm could have fixed the second column to each of the $(r+1)/2$ possibilities and then iterated in parallel to find the remaining columns[1], but we would not expect the results to be different.

Some new arrays are created through juxtaposition using our new arrays and other previously known arrays. Juxtaposition, in this case, creates a new array OA($n_1 + n_2$, $(n_1/4 + n_2/4)^1 2^{\min(p_1,p_2)}$, 2) by stacking the $\min(p_1, p_2)$ two-level factors in OA(n_1, $(n_1/4)^1 2^{p_1}$, 2) and OA(n_2, $(n_2/4)^1 2^{p_2}$, 2) and creating an $(n_1/4 + n_2/4)$-level factor by stacking the $(n_1/4)$-level factor coded $(1, 2, \ldots, n_1/4)$ and the $(n_2/4)$-level factor coded $(n_1/4 + 1,\ n_1/4 + 2, \ldots, n_1/4 + n_2/4)$. Previously, all of the arrays in the family OA($4r$, $r^1 2^p$, 2) for odd r and $4r \geqslant 44$ were created using juxtaposition. For $4r \geqslant 60$, they all had $p = 13$ two-level factors from OA(36, $9^1 2^{13}$, 2). Other arrays can be created using the method of Wang and Wu (1991). They showed how to create OA($2n$, $r^1 4^1 2^{p+n\ \ 3}$, 2) from OA(n, $r^1 2^p$, 2) and an $n \times n$ Hadamard matrix, creating a four-level factor from 3 two-level factors. Obviously, we could use our new arrays to make other larger arrays as well.

[1]We thank an anonymous reviewer for pointing this out.

4. Conclusions and discussion

Suen (1989) believed that larger arrays should be available for 36 runs, and in fact we found three more two-level factors than were previously known. We do not know if we found the maximum p for any of the new arrays. It would seem, for example, based on our other results, that OA(44, $11^1 2^{16}$, 2) should exist, but we could not find it. For 132 and 140 runs, our computerized searches never found a larger array than we could create through juxtaposition. Finding larger arrays will require either more searches, a different algorithm, or ideally, a combinatorial method. However, this approach has worked well in adding up to ten new columns to members of the OA($4r$, $r^1 2^p$, 2) for odd r family and adding a number of other new arrays to the catalog.

Appendix. Search algorithm implementation

```
proc iml;  n 44;  p 16;    * search for n runs  and p two-level factors;
       r n/4; r3 3 # r;
       x j(p, n, 0); z j(n, 1, 0); * x: array transposed, z: candidate column;
       file log;       * stop after stop[j] random initial starts on a column;
       stop 1e8 > <floor(2.3 ## (1:25));
       e { 1 1 -1 -1}   ‘ || { 1 -1 1 -1}   ‘ || { 1 -1 -1 1}   ‘ ;  e e || -e; * 6 entries;
       x[1,] j(1, r, 1) @ e[,1]  ‘ ;    got 1;  * got 1 col, first is all entry 1;
       m j(r, 1, 0);                           * set up symbol column indices;
       do num 1 to 1e9 until(ssq 0);           * keep trying until orthogonal;
                ssq 0;            * want zero scalar products with all previous cols;
                do j 2 to p while(ssq 0);      * loop over num 2-levs until orthog;
                         t x[1:(j - 1),];                         * good factors so far;
                         do ini 1 to stop[j] until(ssq 0);        * try and retry each col;
                                  ssq 1e9; cy 0; * big initial ssq scalar prods, y changed at 0;
                                  call randgen(m, 'UNIFORM'); m ceil(m # 6); * random entries 1-6;
                                  do i 1 to r; z[((i - 1) # 4 + 1):(i # 4)] e[,m[i]]; end;
                                  tz t * z;        * array times candidate, want it to be all zero;
                                  do y 0 to r3 until(ssq 0 | ((y - cy) >r)); * try to improve;
                                           i mod(y, r) + 1; l ((i - 1) # 4 + 1) : (i # 4); * indices;
                                           tl t[,l]; old tz; tz tz - tl * e[,m[i]];  * Try each entry ;
                                           q (tz + tl * e)[##,]; newssq min(q);    * avoiding unnecess;
                                           if newssq <ssq then do;                 * matrix multiplies.;
                                                    cy y; ssq newssq; m[i] q[>:<];     * Look for  changes;
                                                    z[l] e[,m[i]];                   * that make X'X;
                                                    tz tz + tl * e[,m[i]];           * closer to diag. ;
                                                    end;                             * save improvements ;
                                           else tz old;           * otherwise revert to previous state;
                                           end;
                                  end;
                         if ssq 0 then do; x[j,] z  ‘ ; got j; end;    * got a new orthog col;
                         if got >  13 then put num got ini;            * progress report;
                         end;
                if got >  13 then put num got '   done';    * report done with this one;
                if got>  p then do;                          * got it! output and quit;
                         x (1:r)  ‘ @ j(4, 1, 1) ||x  ‘ ;
                         create sasuser.x from x;
                         append from x;
                         end;
                end;
       quit;
```

References

Hedayat, A.S., Sloane, N.J.A., Stufken, J., 1999. Orthogonal Arrays. Springer, New York.

Kuhfeld, W.F., 2005a. Marketing Research Methods in SAS. http://support.sas.com/techsup/tnote/tnote_stat.html#market.

Kuhfeld, W.F., 2005b. Difference schemes via computerized searches. J. Statist. Plan. Inference 127, 341 346.

Kuhfeld, W.F., 2005c. Orthogonal Arrays. http://support.sas.com/techsup/technote/ts723.html.

Kuhfeld, W.F., Tobias, R.D., 2005. Large factorial designs for product engineering and marketing research applications. Technometrics 47, 132 141.

Rao, C.R., 1947. Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays. J. Roy. Statist. Soc. 9 (Suppl.), 128 139.

SAS, 2003. SAS/IML 9.1 User's Guide, volumes 1 and 2. SAS, Cary NC.

Suen, C.Y., 1989. Some resolvable orthogonal arrays with two symbols. Comm. Statist. Theory Methods 18, 3875 3881.

Wang, J.C., Wu, C.F.J., 1991. An approach to the construction of asymmetrical orthogonal arrays. J. Amer. Statist. Assoc. 86, 450 456.

Xu, H., 2002. An algorithm for constructing orthogonal and nearly orthogonal arrays with mixed levels and small runs. Technometrics 44, 356 368.